ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ NIELINIOWYCH PRZY POMOCY DODATKU *SOLVER* PROGRAMU MICROSOFT EXCEL

1. Problem

Rozważmy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi (x_1, x_2):[1]

$$\begin{cases} x_1 = \sin x_2 \\ x_2 = \cos x_1 \end{cases} \tag{1}$$

Nie jest możliwe wykonanie przekształceń równań tego układu, tak żeby uzyskać jawne wyrażenia na x_1 i x_2 – innymi słowy, rozwiązań nie można wyrazić przez funkcje elementarne Układ równań (1) można zapisać jako:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = x_1 - \sin x_2 = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = x_2 - \cos x_1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Rozwiązanie układu (1) polega zatem na znalezieniu takiego wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, dla którego $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$.

2. Rozwiązanie

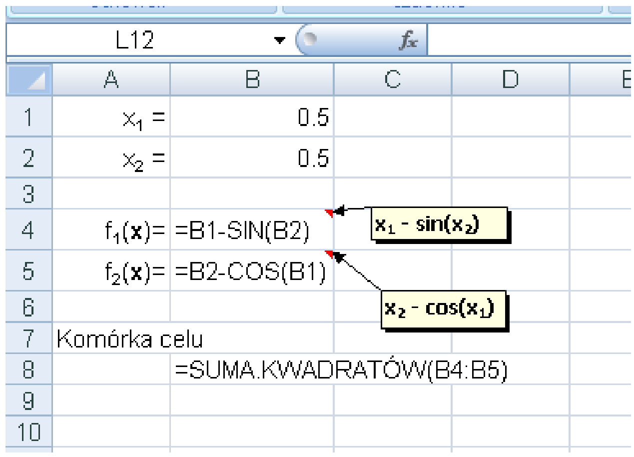
Problem rozwiązywania układu równań nieliniowych można sprowadzić do zadania z optymalizacji funkcji wielu zmiennych: jeśli $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem układu (1), to funkcja będąca sumą kwadratów funkcji f_1 i f_2 z równania (2) osiąga minimum globalne, przy którym dodatkowo wartość tej funkcji jest równa 0.

3. Implementacja

Implementacja dowolnego układu równań w programie MS Excel jest bardzo prosta. Przede wszystkim, należy zdefiniować komórki, w których przechowywane będą wartości zmiennych (niewiadomych). Poszczególne równania z rozważanego układu należy

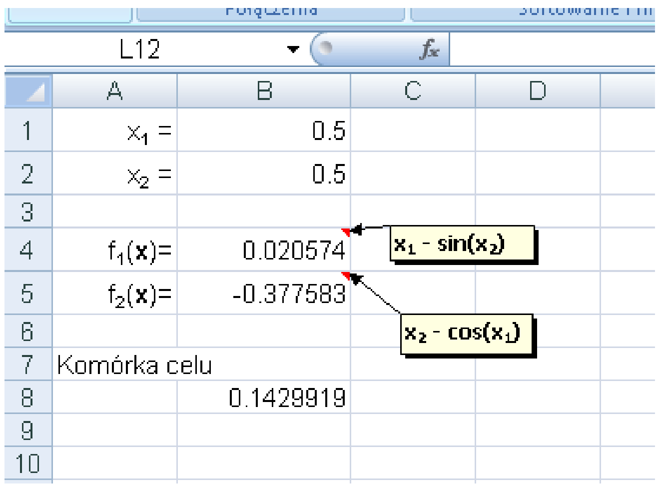
[1] Opisany sposób postępowania można zastosować zarówno do rozwiązywania jednego równania nieliniowego, jak również uogólnić go na układy składające się z dowolnej liczby równań N z N niewiadomymi ($N > 2$).

przedstawić w postaci formuł, stosując przy tym funkcje zdefiniowane w środowisku MS Excel, jak również odwołując się do poszczególnych zmiennych jak do adresów wcześniej zdefiniowanych komórek. Sumę kwadratów wartości poszczególnych funkcji najwygodniej jest obliczyć stosując formułę SUMA.KWADRATÓW. Przykład nawiązujący do układu równań (2) przedstawia Rys. 1.



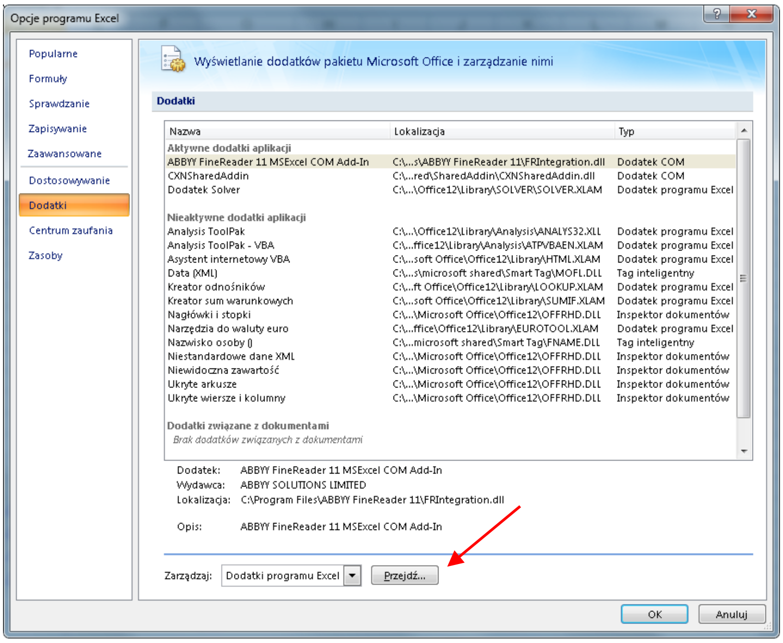
Rys. 1.

Rozwiązanie układu równań polega na takim dopasowaniu wartości w komórkach B1 i B2, aby wartości wyświetlane w komórkach B4, B5 i B8 były możliwe jak najbliższe lub równe zeru. Na Rys. 1. wpisane wartości to x_1 = 0.5, x_2 = 0.5. Oczywiście, wartości te nie są rozwiązaniami układu równań (1), ponieważ wartość sumy kwadratów funkcji z układu (2) nie jest równa 0 (Rys. 2).



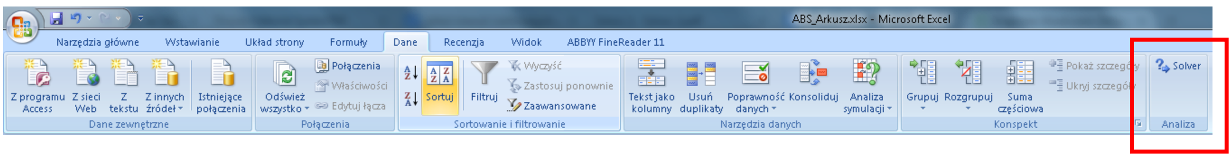
Rys. 2.

Aby znaleźć prawidłowe wartości x_1 i x_2,należy użyć dodatku o nazwie *Solver*. Dodatek ten można zainstalować z poziomu środowiska Excel. Aby tego dokonać, należy otworzyć okno „Opcje programu Excel”, z menu po lewej stronie okna wybrać „Dodatki” i kliknąć „Przejdź” (Rys. 3).



Rys. 3.

Na ekranie pojawi się okno dialogowe z listą wyboru. Należy zaznaczyć pozycję „Dodatek Solver” i kliknąć „OK”. Po wykonaniu tych czynności dodatek *Solver* będzie dostępny z poziomu karty „Dane” głównego menu programu MS Excel (Rys. 4).

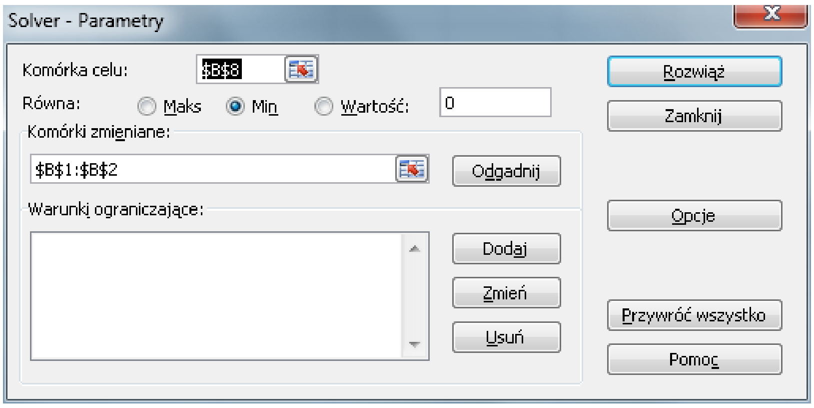


Rys. 4.

Po kliknięciu „Solver” na ekranie pojawia się okno dialogowe (Rys. 5), w którym należy zdefiniować:

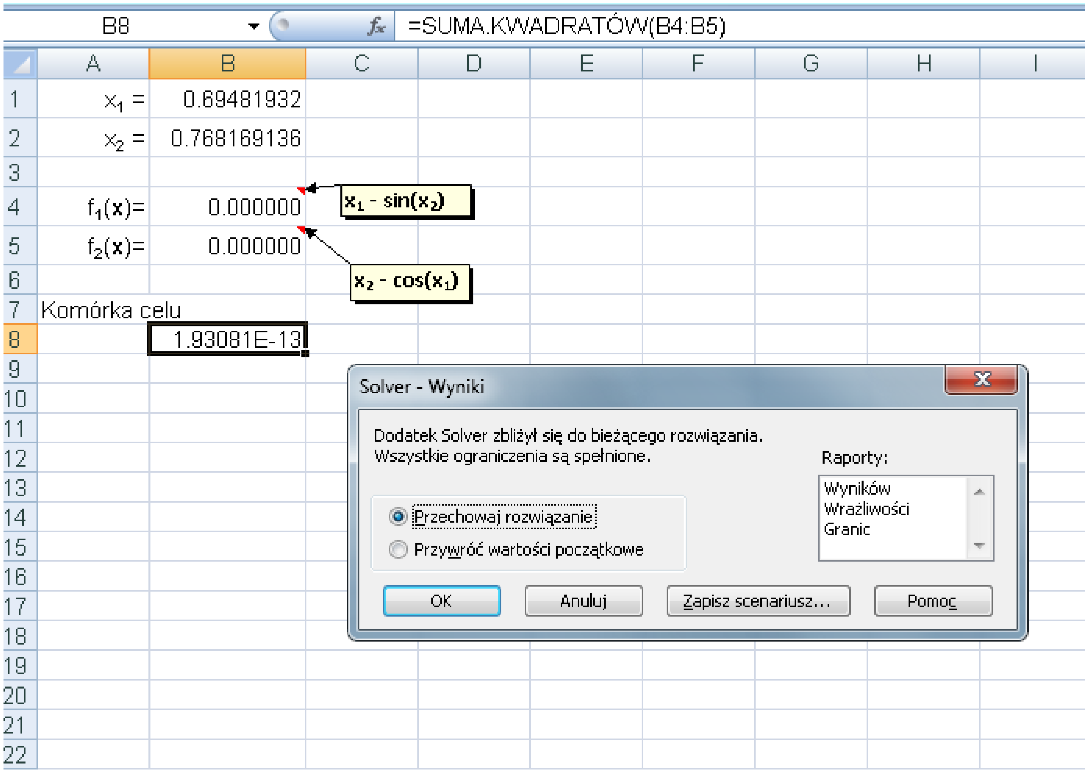
- **komórkę celu**, tzn. komórkę, w której zdefiniowana jest funkcja, która będzie optymalizowana lub funkcja definiującą równanie, którego rozwiązanie ma być wyznaczone;
- **komórki zmieniane**, tzn. komórki przechowujące wartości poszczególnych zmiennych;
- **warunki ograniczające** wartości zmiennych (<=, =, >=), istotne jeśli szuka się np. rozwiązań o wartościach dodatnich lub z konkretnego przedziału.
- **problem**, tzn. określenie, czy szukamy wartości zmiennych, przy których funkcja celu osiąga minimum/maksimum (odpowiednio opcje „Min." / „Maks.") lub zadaną wartość (opcja „Wartość").
- **dodatkowe opcje**, związane z algorytmem, dokładnością obliczeń, liczbą możliwych iteracji, itp. (więcej informacji na ten temat można znaleźć w Pomocy programy MS Excel).

Poszczególne komórki wybiera się wpisując ich adresy ręcznie lub klikając na .



Rys. 5.

W omawianym przykładzie, komórką celu jest komórka B8, natomiast komórkami zmienianymi są B1 i B2 (czyli zakres: B1:B2). Rozwiązanie uzyskujemy poprzez kliknięcie „Rozwiąż". Efekt tego działania przedstawia Rys. 6.



Rys. 6.

Jak widać, wartości zmiennych x_1 i x_2 zostały zmienione. Zarówno wartość widniejąca w komórce celu, jak również wartości funkcji definiujące układ równań są równe (lub bardzo bliskie) 0. Aby przechować rozwiązanie w bieżącym arkuszu, należy kliknąć „OK". Dodatkowo, dodatek *Solver* umożliwia wygenerowanie różnego typu raportów (więcej informacji na ten temat można znaleźć w Pomocy programy MS Excel).

UWAGA! Uzyskanie dokładnego rozwiązania bardzo często zależy od odpowiedniego wyboru wartości początkowych w komórkach zmienianych. Na ogół, konieczne jest podjęcie wielu prób rozwiązania startując z różnych wartości początkowych, wybieranych najczęściej metodą prób i błędów (jeśli o rozwiązaniu nie jest wiadome zupełnie nic). W pewnych sytuacjach jest jednak możliwe określenie „sensownych" początkowych wartości zmiennych na podstawie znajomości przebiegu funkcji definiujących układ równań lub innych informacji nt. rozważanego problemu.